Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN

Departamento de Computación

Protocolo de Tesis

Tesista: Carlos Antonio Bulnes Domínguez

Directora de tesis: Dra. Dolores Lara Cuevas

Resumen

Sea S un conjunto de n puntos en el plano. Sea E un conjunto de segmentos entre parejas de S. Si E es el conjunto de los $\binom{n}{2}$ posibles segmentos decimos que la gráfica definida por S y E es una gráfica completa y la denotamos como K_n. Denotamos como H a una subgráfica de K_n y a Q como un conjunto de subgráficas H. Sea k un número entero positivo. Utilizando búsquedas exhaustivas, en este trabajo deseamos determinar, fijando una subgráfica H, a partir de qué valor de n podemos siempre encontrar un conjunto Q de tamaño k donde todos los elementos de Q se *crucen*. También buscaremos conjuntos Q donde sus elementos se *intersectan*. Con estos resultados contribuiremos con cotas para los problemas planteados.

1. Datos Generales

1.1. Título de proyecto

Algunas cotas para *Crossing Families* e *Intersecting Families*

1.2. Datos del alumno

Nombre:	Carlos Antonio Bulnes Domínguez
Matrícula:	151270027
Dirección:	
Teléfono (casa):	
Dirección electrónica:	cbulnes@computacion.cs.cinvestav.mx

1.3. Institución

Nombre:	CINVESTAV-IPN
Departamento:	Depto. de Computación.
Dirección:	Av. Instituto Politécnico Nacional No. 2508, Col. San Pedro Zacatenco, México, D.F. 07300.
Teléfono:	(52) (55) 57473759

1.4. Beca de tesis

Institución otorgante:	CONACYT
Tipo de beca:	Maestría
Vigencia:	Septiembre 2015 - Agosto 2017

1.5. Datos de la asesora

Nombre:	Dra. Dolores Lara Cuevas
Dirección:	Av. IPN 2508. Col. San Pedro Zacatenco
Teléfono (oficina):	(+52 55) 5747 3800 ext 6550
Institución:	CINVESTAV-IPN
Departamento adscripción:	Computación
Grado académico:	Doctora en Ciencias de la Computación

2. Descripción del proyecto

2.1. Antecedentes

Decimos que un conjunto de puntos en el plano está en posición general, si no existen 3 puntos del conjunto que sean colineales. Para n fija hay un número infinito de conjuntos de n puntos en el plano en posición general. En esta tesis, trabajaremos unicamente con conjuntos de puntos en el plano en posición general.

El *order type*[1] de un conjunto de puntos $\{p_1, ..., p_n\}$ es una función que asigna a cada tripleta ordenada i, j, k en $\{1, ..., n\}$ la orientación de la tripleta de puntos p_i, p_j, p_k. Decimos que dos conjuntos de puntos S_1 y S_2 son *combinatoriamente equivalentes*, si pertenecen al mismo order type, es decir, si existe una biyección entre S_1 y S_2 tal que cualquier tripleta en S_1 tenga la misma orientación que su tripleta correspondiente en S_2. Recordemos que para cada valor de n existe una cantidad infinita de conjuntos de puntos en el plano. Los order types ofrecen una caracterización de los conjuntos de puntos de cada valor de n, de tal manera que nos permite pasar de una cantidad infinita de conjuntos a una cantidad finita de conjuntos. Existe una base de datos desarrollada por los autores de [1] que almacena los order types para conjuntos de hasta 11 puntos. En la Figura 1 podemos ver los order types que existen para $n = 4$.

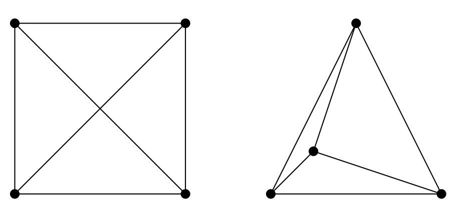


Figura 1: Order types para $n = 4$

Sea S un conjunto de $n > 0$ puntos y sea E un conjunto de segmentos entre parejas de puntos de S, decimos que $G = (S, E)$ es una gráfica geométrica. Dicho de otro modo, una gráfica geométrica es un dibujo en el plano de una gráfica, tal que los vértices de la gráfica son puntos en el plano y las aristas de la gráfica son segmentos de recta. Si E es el conjunto de los $\binom{n}{2}$ posibles segmentos, entonces decimos que G es *una gráfica geométrica completa* y la denotamos como K_n.

[1] Se utiliza el término en inglés pues se trata de una palabra técnica que no cuenta con traducción

Decimos que dos segmentos de E que inciden en un mismo punto de S, son *adyacentes*, de lo contrario decimos que son *disjuntos*. Dos segmentos disjuntos definidos por S se *cruzan* si tienen un punto interior en común. Dos segmentos definidos por S se *intersectan* si se cruzan o son adyacentes.

Sean H_1 y H_2 dos subgráficas de K_n disjuntas en vértices. Decimos que H_1 y H_2 *se cruzan* si existe un segmento en H_1 y un segmento en H_2 que se cruzan. Decimos que dos subgráficas de K_n, H_1 y H_2 *se intersectan* si existe un segmento en H_1 y un segmento en H_2 que se intersectan. La Figura 2 ilustra estos conceptos, en la Figura 2A se muestra una gráfica completa con 5 puntos, en la Figura 2B se puede ver un ejemplo de subgráficas de K_5 que se cruzan, y en la Figura 2C se muestran dos subgráficas de K_5 que se intersectan.

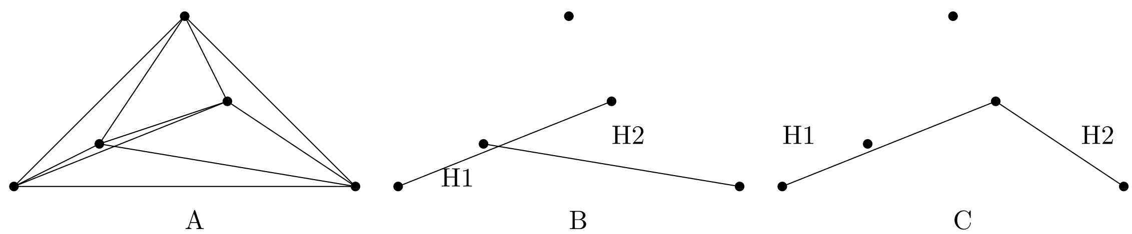


Figura 2: Cruce e intersección de subgráficas de K_5

Un *camino* es una gráfica en la que cada uno de sus vértices inciden exactamente dos aristas, excepto en dos vértices donde incide una sola arista. Sea S un conjunto de puntos, un *k-camino geométrico* P_k de S es un *camino* con k aristas donde todos sus vértices son elementos de S. En la Figura 3 podemos ver algunos ejemplos de *k-caminos*.

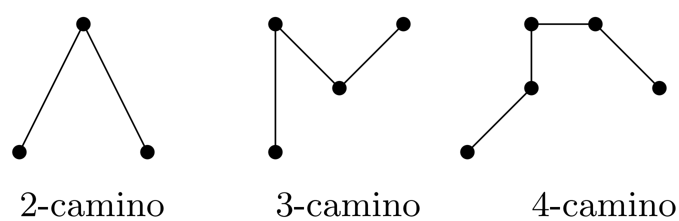


Figura 3: Ejemplos de k-caminos

Una *gráfica bipartita* $K_{u,v}$ es una gráfica cuyos vértices se pueden separar en dos conjuntos disjuntos U y V de manera que las aristas sólo pueden conectar vértices de U con vértices de V. En la Figura 4 se muestra un ejemplo de la gráfica bipartita $K_{1,3}$.

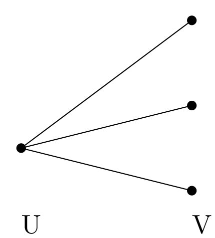


Figura 4: Gráfica bipartita $K_{1,3}$

Dada una gráfica H, una *H-Crossing Family*[2] es un conjunto de subgráficas de K_n disjuntas en

[2]Se utiliza el término en inglés pues se trata de una palabra técnica que no cuenta con traducción

vértices, tales que:

1. Cada subgráfica es un dibujo de la gráfica H.

2. Cada pareja de subgráficas se cruzan.

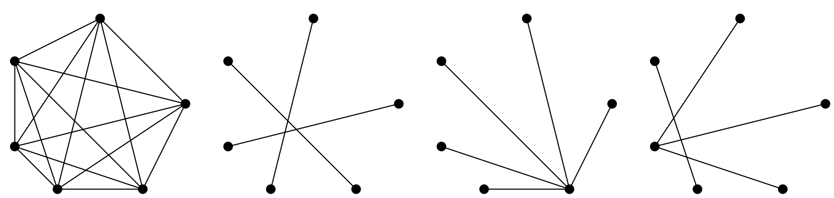
Dada una gráfica H, una *H-Intersecting Family*[3] es un conjunto de subgráficas de K_n, tales que:

1. Cada subgráfica es un dibujo de la gráfica H.

2. Cada pareja de subgráficas se intersectan.

Una *Crossing Family Heterogénea* es una *Crossing Family* donde las subgráficas de la familia no son necesariamente dibujos de una misma gráfica.

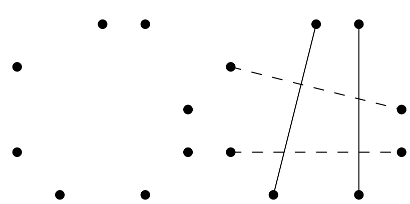
Estos conceptos establecen una forma de estudiar los cruces y las intersecciones entre subgráficas H, para este trabajo usaremos *k-caminos*, *gráficas bipartitas* y *gráficas completas* como subgráficas H. Podemos ver ejemplificados estos conceptos en la Figura 5, en la Figura 5A se muestra una gráfica completa K_6, la Figura 5B muestra una *Crossing Family* de segmentos de tamaño 3 definida por K_6, la Figura 5C muestra una *Intersecting Family* de segmentos de tamaño 5 definida por K_6, finalmente en la Figura 5D se muestra una *Crossing Family Heterogénea* de $K_{1,3}$ y segmentos de tamaño 2 también definida por K_6.



A B C D

Figura 5: Ejemplo de una *Crossing Family*, una *Intersecting Family* y una *Crossing Family Heterogénea*

Otro concepto que también estudiaremos es: Sean n y m dos enteros positivos. Definimos una *(n,m)-malla* como una colección de segmentos $\{s_1, s_2, ..., s_n, t_1, t_2, ..., t_m\}$ tal que cada segmento s_i intersecta cada segmento t_j y tal que los segmentos s_i y s_j son disjuntos si $i \neq j$, de la misma manera para t_i y t_j. La figura 6 ilustra una *(n,m)-malla*, en la Figura 6A se muestra un conjunto de 6 puntos en posición convexa sobre el que definimos una *(2,2)-malla* (ver Figura 6B).



A B

Figura 6: *(2,2)-malla*

[3]Se utiliza el término en inglés pues se trata de una palabra técnica que no cuenta con traducción

2.2. Motivación

Determinar el tamaño más grande de una *Crossing Family* de segmentos para cualquier valor de n es un problema que se estudió por primera vez por los autores de [2] y que aún se encuentra abierto. Sin embargo, sí se han determinado cotas para este problema. En la literatura también podemos encontrar variantes del problema, como los que proponen los autores de [3] y [4].

Lo anterior nos indica que existe un interés en el área por conocer variantes del problema de [1], por esta razón en esta tesis estudiaremos *Crossing Families* de subgráficas que no sean segmentos, además estudiaremos otras familias para determinar si nuestras variantes pueden ser encontradas para valores pequeños de n. De ser así indicaremos a partir de qué valor de n podemos encontrarlas.

Estos resultados aportarán información acerca de estos problemas, y ayudarán a la comunidad de Geometría Combinatoria a explorar problemas más complejos considerando los resultados aportados.

3. Planteamiento del problema

Sea S un conjunto de n puntos en el plano y sea K_n la gráfica completa definida por S. Denotamos como $H\text{-}cf(S)$ al tamaño de la *H-Crossing Family* más grande en K_n definida por S y denotamos como $H\text{-}cf(n) = max\{H\text{-}cf(S)|S$ es un conjunto de n puntos en el plano $\}$.

Sea k un número entero positivo. Usando la base de datos de los autores de [1] y fijando $H\text{-}cf(n) = k$, deseamos determinar el valor más pequeño de n, tal que siempre podamos encontrar: una *H-Crossing Family* utlizando como H las subgráficas $2K_2$ y $K_{1,3}$, una *H-Intersectig Family* utilizando como H las subgráficas K_2, K_3, K_4 y P_3, una *Crossing Family Heterogénea* y una (2,2)-malla.

4. Objetivos generales y específicos del proyecto

General

Utilizando la base de datos de los autores de [1] y fijando k para cada familia, determinaremos el tamaño de n tal que siempre exista una $2K_2$-*Crossing Family*, una $K_{1,3}$-*Crossing Family*, una K_2-*Intersecting Family*, una K_3-*Intersecting Family*, una K_4-*Intersecting Family*, una P_3-*Intersecting Family*, una *Crossing Family Heterogénea* y una *(2,2)-malla.*

Particulares

- Buscar en la base de datos, utilizando como H las subgráficas $2K_2$ y $K_{1,3}$, y un valor de k propuesto para cada subgráfica, a partir de qué valor de n podemos encontrar una *H-Crossing Family.*

- Buscar en la base de datos, utilizando como H las subgráficas K_2, K_3, K_4 y P_3, y un valor k propuesto para cada subgráfica, a partir de qué valor de n podemos encontrar una *H-Intersecting Family.*

- Buscar en la base de datos a partir de qué valor de n podemos encontrar una *Crossing Family Heterogénea.*

- Buscar en la base de datos una *(2,2)-malla.*

5. Metodología

- Estudiaremos qué se ha estudiado acerca de *Crossing Families* de segmentos.
- Estudiaremos a cuáles otras subgráficas de K_n se les ha estudiado su *Crossing Family.*
- Para cada valor de n de la base de datos de los autores de [1] se realizarán búsquedas exhaustivas en cada *Order Type* buscando una *H-Crossing Family.*
- Cuando se logre encontrar una *H-Crossing Family* en cada uno de los *Order Types* de un valor de n podremos concluir que siempre podremos encontrar una *H-Crossing Family* a partir de ese valor de n.
- Una vez obtenidos los resultados para *Crossing Families* procederemos a buscar *Intersecting Families*, *(j,k)-mallas* y *Crossing Families Heterogéneas.*
- Ya habiendo obtenido todos los resultados se realizarán las conclusiones.
- Finalmente se realizará el proceso de escritura del trabajo de tesis.

6. Cronograma de actividades

Actividad	Sep	Oct	Nov	Dic	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep
Investigación	*	*											
Elaboración del protocolo	*	*	*	*									
Busqueda de la $2K_2$-*Crossing Family*				*	*								
Busqueda de la $K_{1,3}$-*Crossing Family*					*	*							
Busqueda de la K_2-*Intersecting Family*						*	*						
Busqueda de la K_3-*Intersecting Family*							*	*					
Busqueda de la K_4-*Intersecting Family*								*	*				
Busqueda de la P_3-*Intersecting Family*									*	*			
Busqueda de la *Crossing Family Heterogénea*										*	*		
Busqueda de la *(2,2)-malla*											*	*	
Escritura de la tésis									*	*	*	*	
Defender la la tesis													*

7. Infraestructura

- Computadora portátil con sistema operativo Linux.
- Lenguaje de programación C.

8. Estado del arte

En 1994 los autores de [2] mostraron que cualquier conjunto de n puntos posee una *Crossing Family* de tamaño al menos $\sqrt{n/12}$ y describieron un algoritmo eficiente para encontrar dichas familias. En 2015 los autores de [2] mostraron que para cualquier conjunto S de n puntos siempre existe un conjunto de *3-camino* que se cruzan con al menos $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ elementos. Probaron también que para cualquier conjunto S siempre existe un conjunto de $\lfloor \frac{n}{6} \rfloor$ tríangulos disjuntos en vértices de

S que se cruzan. También mostraron que siempre existe un ciclo Hamiltoniano en S tal que sus aristas se crucen al menos $\frac{n^2}{12} - O(n)$ veces.

Un trabajo donde se estudiaron las mallas junto a las *Crossing Families* de segmentos fue en el de los autores de [4] donde definen $c(k)$ como el menor entero, tal que cualquier conjunto de $c(k)$ puntos generen una *Crossing Family* de k segmentos. Así mismo definieron $\#(j,k)$ como el menor entero, tal que cualquier conjunto de $\#(j,k)$ puntos genere una *(j,k)-malla*. En el artículo los autores establecen que $9 \leq c(3) \leq 16$ y $\#(1,2) = 8$.

9. Contribuciones y resultados esperados

- Dar a conocer a partir de qué valor de n, con $3 \leq n \leq 10$ podemos encontrar una $2K_2$-*Crossing Family*, $K_{1,3}$-*Crossing Family*, K_2-*Intersecting Family*, K_3-*Intersecting Family*, K_4-*Intersecting Family*, P_3-*Intersecting Family*, $(2,2)$-*malla* y una *Crossing Family Heterogénea* o concluir que $n > 10$.

- Un artículo en el Congreso Nacional de la Sociedad Mexicana Matemática.

10. Referencias

[1] Aichholzer, O., Aurenhammer, F., and Krasser H., *Enumerating Order Types for Small Point Sets with Applications*, Order, Springer, 19(3):265-281, 2002.

[2] Aronov, B., Erdos, P., Goddard, W., Kleitman, D. J., Klugerman, M., Pach, J., and Schulman, L. J., *Crossing families*, Combinatorica, 14(2):127-134, 1994.

[3] Rebollar, J. L. A., Lagos, J. C., and Urrutia, J. *Crossing families and self crossing Hamiltonian cycles*, XVI EGC, Barcelona, 2015.

[4] Nielsen, M. J. and Webb, W., *On Some Numbers Related to the Erdos-Szekeres Theorem*, Open Journal of Discrete Mathematics, Scientific Research, 3(3):167-173, 2013.

Autorización

Fecha de inicio	**Fecha de término**
Septiembre 2016	Septiembre 2017

Firma del alumno: ____________________
Carlos Antonio Bulnes Domínguez

Comité de aprobación del tema de tesis: *"Algunas cotas para Crossing Families e Intersecting Families"*

Dra. Dolores Lara Cuevas ____________________
Directora de tesis

Dr. Amilcar Meneses Viveros ____________________

Dr. Guillermo Benito Morales Luna ____________________