Tarea 4 Analisis y Diseño de Algoritmos

Andrés Cruz Chipol

7 Octuber 2025

1. Resolución de recurrencias

Use el método maestro, luego el árbol de recursión y finalmente el método de sustitución para dar las cotas asintóticas de las siguientes recurrencias:

1. $T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + 1$
2. $T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt{n}$
3. $T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + n$
4. $T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2$

2. Ejercicio: $T(n) = 2T(n/4) + 1$

2.1. Método Maestro

Identificamos los parámetros de la forma estándar $T(n) = aT(n/b) + f(n)$:

$$a = 2, \qquad b = 4, \qquad f(n) = 1. \tag{1}$$

Calculamos el exponente crítico:

$$\log_b a = \log_4 2 = \frac{1}{2} \quad (\text{ya que } 4^{1/2} = 2). \tag{2}$$

Por lo tanto,

$$n^{\log_b a} = n^{\log_4 2} = n^{1/2}. \tag{3}$$

Comparamos $f(n)$ con $n^{\log_b a}$ paso a paso. Para todo $n \geq 1$ se cumple:

$$\begin{aligned} 1 &\leq n^{\log_b a} \\ 1 &\leq n^{\log_4 2} \\ 1 &\leq n^{1/2} \\ 1 &\leq \sqrt{n}. \end{aligned} \tag{4}$$

Para verificar el Caso 1 del Método Maestro necesitamos un margen polinomial $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(n) = O\big(n^{\log_b a - \varepsilon}\big). \tag{5}$$

Tomemos, por ejemplo, $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Verificamos:

$$\begin{aligned} 1 &\le n^{\log_4 2 - \frac{1}{4}} \\ 1 &\le n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} \\ 1 &\le n^{\frac{1}{4}}, \end{aligned} \tag{6}$$

de modo que

$$f(n) = 1 = O\Big(n^{\log_4 2 - \frac{1}{4}}\Big). \tag{7}$$

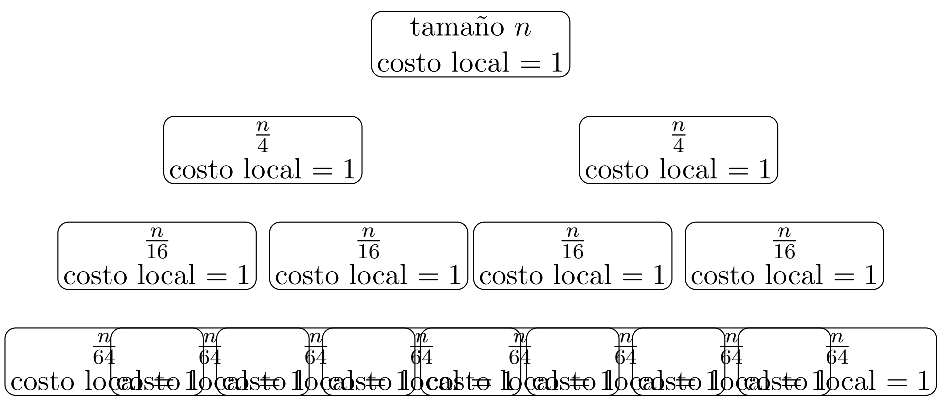
Con esto se cumple el **Caso 1** del Método Maestro y concluimos:

$$\boxed{T(n) = \Theta\big(n^{\log_b a}\big)} \quad \Longrightarrow \quad T(n) = \Theta\big(n^{\log_4 2}\big) = \Theta\big(n^{1/2}\big) = \Theta(\sqrt{n}). \tag{8}$$

2.2. Método del árbol de recurrencia

Cada nodo de tamaño m realiza un coste local $f(m) = 1$ y genera $a = 2$ subproblemas de tamaño $m/b = m/4$.

Esquema del árbol (niveles iniciales)



$$\vdots$$

Altura del árbol

En el nivel i hay 2^i nodos, cada uno de tamaño $n/4^i$. La expansión se detiene cuando el tamaño es 1:

$$\frac{n}{4^h} = 1 \iff 4^h = n \iff h = \log_4 n. \tag{9}$$

Coste por nivel y coste total

El coste por nodo es 1, luego el coste del nivel i es:

$$\text{coste en el nivel } i = 2^i \cdot 1 = 2^i. \tag{10}$$

La suma de los niveles internos (hasta el nivel $h-1$) es:

$$\sum_{i=0}^{h-1} 2^i = 2^h - 1. \tag{11}$$

Como $h = \log_4 n$, reescribimos 2^h en función de n paso a paso:

$$\begin{aligned} 2^h &= 2^{\log_4 n} \\ &= 2^{\frac{\ln n}{\ln 4}} \\ &= e^{\ln 2 \cdot \frac{\ln n}{\ln 4}} \\ &= e^{\ln n \cdot \frac{\ln 2}{\ln 4}} \\ &= n^{\frac{\ln 2}{\ln 4}} \\ &= n^{\log_4 2}. \end{aligned} \tag{12}$$

Por tanto,

$$\sum_{i=0}^{h-1} 2^i = 2^h - 1 = n^{\log_4 2} - 1. \tag{13}$$

Ahora contamos las hojas. En el nivel h hay

$$2^h = 2^{\log_4 n} = n^{\log_4 2} \tag{14}$$

hojas, cada una con coste $T(1) = d$. Así, el coste total en hojas es

$$\text{coste en hojas} = d \cdot 2^h = d \cdot n^{\log_4 2}. \tag{15}$$

Sumando todo:

$$\begin{aligned} T(n) &= \underbrace{(2^h - 1)}_{\text{niveles internos}} + \underbrace{d \cdot 2^h}_{\text{hojas}} \\ &= (d+1) \cdot 2^h - 1 \\ &= (d+1) \cdot n^{\log_4 2} - 1 \\ &= \Theta\big(n^{\log_4 2}\big) = \Theta\big(n^{1/2}\big). \end{aligned} \tag{16}$$

Con lo que nuevamente:

$$\boxed{T(n) = \Theta\big(n^{\log_b a}\big)} \quad \text{con } a = 2,\ b = 4. \tag{17}$$

2.3. Método de sustitución (inducción)

Proponemos como solución

$$T(n) = \Theta\big(n^{\log_4 2}\big) = \Theta(\sqrt{n}). \tag{18}$$

Demostraremos tanto una cota superior como una inferior por inducción (para $n = 4^k$).

Cota superior: $T(n) = O(\sqrt{n})$

Afirmación inductiva: existen constantes $C > 0$ y $D \geq 1$ tales que, para todo $n \geq 1$,

$$T(n) \leq C\sqrt{n} - D. \tag{19}$$

Caso base ($n = 1$): si $T(1) = d > 0$, elegir $C \geq d + D$ garantiza

$$T(1) = d \leq C - D = C\sqrt{1} - D. \tag{20}$$

Paso inductivo: supongamos que para todo $m < n$ se tiene $T(m) \leq C\sqrt{m} - D$. Entonces,

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T\left(\frac{n}{4}\right) + 1 \\ &\leq 2\Big(C\sqrt{\tfrac{n}{4}} - D\Big) + 1 \qquad \text{(hipótesis inductiva)} \\ &= 2\Big(\tfrac{C}{2}\sqrt{n} - D\Big) + 1 \\ &= C\sqrt{n} - 2D + 1 \\ &\leq C\sqrt{n} - D \qquad \text{si} \quad D \geq 1. \end{aligned} \tag{21}$$

Así queda probado $T(n) \leq C\sqrt{n}$, es decir, $T(n) = O(\sqrt{n})$.

Cota inferior: $T(n) = \Omega(\sqrt{n})$

Afirmación inductiva: existe $c > 0$ tal que, para todo $n \geq 1$,

$$T(n) \geq c\sqrt{n}. \tag{22}$$

Caso base ($n = 1$): si $T(1) = d > 0$, tomar $0 < c \leq d$ asegura

$$T(1) = d \geq c\sqrt{1} = c. \tag{23}$$

Paso inductivo: si para todo $m < n$ se cumple $T(m) \geq c\sqrt{m}$, entonces

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T\left(\frac{n}{4}\right) + 1 \\ &\geq 2 \cdot c\sqrt{\tfrac{n}{4}} + 1 \qquad \text{(hipótesis inductiva)} \\ &= 2 \cdot \tfrac{c}{2}\sqrt{n} + 1 \\ &= c\sqrt{n} + 1 \\ &\geq c\sqrt{n}. \end{aligned} \tag{24}$$

Así, $T(n) = \Omega(\sqrt{n})$.

Conclusión de la sustitución

Al combinar ambas cotas,

$$T(n) = \Theta(\sqrt{n}) = \Theta\big(n^{\log_4 2}\big) = \Theta\big(n^{\log_b a}\big), \tag{25}$$

con $a = 2$ y $b = 4$.

Resumen final

Los tres métodos coinciden en que

$$\boxed{T(n) = \Theta\big(n^{\log_b a}\big) = \Theta\big(n^{\log_4 2}\big) = \Theta(\sqrt{n})}. \tag{26}$$

3. Ejercicio: $T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n}$

3.1. Método Maestro

Identificamos los parámetros de la forma estándar $T(n) = a\,T(n/b) + f(n)$:

$$a = 2, \qquad b = 4, \qquad f(n) = \sqrt{n}.$$

Calculamos el exponente crítico:

$$\log_b a = \log_4 2.$$

Mostramos que

$$\log_4 2 = \frac{1}{2} \quad \text{porque} \quad 4^{1/2} = 2.$$

Entonces

$$n^{\log_b a} = n^{\log_4 2} = n^{1/2} = \sqrt{n}.$$

Comparamos $f(n)$ con $n^{\log_b a}$ paso a paso, verificando $f(n) = \Theta\big(n^{\log_b a}\big)$:

$$f(n) = \sqrt{n} = n^{1/2} = n^{\log_4 2} = n^{\log_b a},$$
$$\exists\, c_1, c_2 > 0 : \quad c_1\, n^{\log_b a} \le f(n) \le c_2\, n^{\log_b a} \qquad (\text{por ejemplo, } c_1 = c_2 = 1).$$

Por lo tanto aplica el **Caso 2** del Método Maestro (con $k = 0$), y obtenemos

$$T(n) = \Theta\big(n^{\log_b a}\, \log n\big).$$

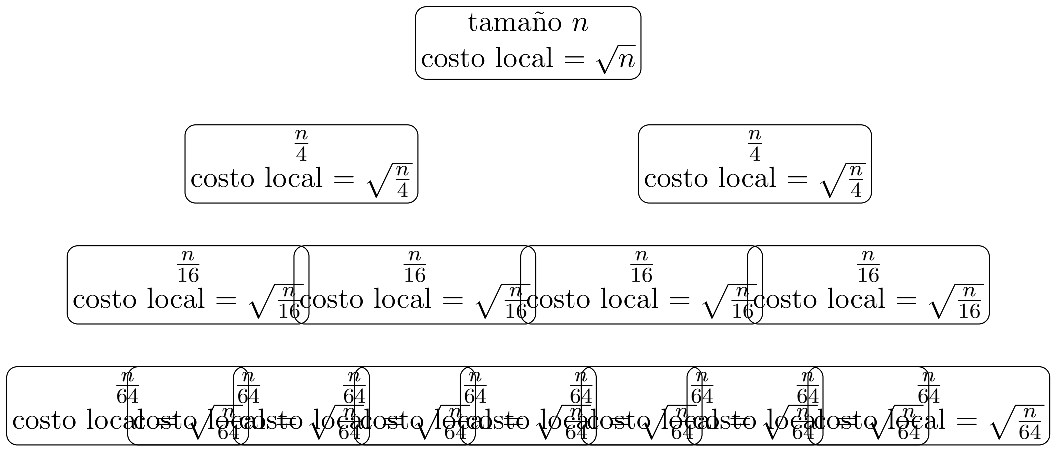
En la notación solicitada y particularizando $a = 2$, $b = 4$:

$$\boxed{T(n) = \Theta\big(n^{\log_b a} \log n\big)} \qquad \text{y en particular} \qquad T(n) = \Theta\big(n^{\log_4 2} \log n\big) = \Theta\big(\sqrt{n}\, \log n\big).$$

3.2. Método del árbol de recurrencia

Cada nodo de tamaño m realiza un coste local $f(m) = \sqrt{m}$ y genera $a = 2$ subproblemas de tamaño $m/b = m/4$.

Esquema del árbol (niveles iniciales)



$$\vdots$$

Altura del árbol

En el nivel i:

$$\text{tamaño de cada subproblema} = \frac{n}{4^i}, \qquad \text{número de nodos} = 2^i.$$

La expansión se detiene cuando el tamaño es 1:

$$\frac{n}{4^h} = 1 \iff 4^h = n \iff h = \log_4 n.$$

Coste por nivel y coste total

El coste por nodo en el nivel i es:

$$\sqrt{\frac{n}{4^i}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{4^i}} = \frac{\sqrt{n}}{2^i}.$$

Entonces, el coste del nivel i es

$$\text{coste en el nivel } i = 2^i \cdot \frac{\sqrt{n}}{2^i} = \sqrt{n}.$$

Todos los niveles internos (desde $i = 0$ hasta $i = h - 1$) tienen el mismo coste $\sqrt{n}$, por lo que:

$$\sum_{i=0}^{h-1} \sqrt{n} = h\sqrt{n} = \sqrt{n}\,\log_4 n.$$

Contamos el coste de las hojas. En el nivel h hay

$$2^h = 2^{\log_4 n} = n^{\log_4 2}$$

hojas, cada una con coste $T(1) = d$. Reescribimos 2^h paso a paso:

$$2^h = 2^{\log_4 n} = 2^{\frac{\ln n}{\ln 4}} = e^{\ln 2 \cdot \frac{\ln n}{\ln 4}} = e^{\ln n \cdot \frac{\ln 2}{\ln 4}} = n^{\frac{\ln 2}{\ln 4}} = n^{\log_4 2} = \sqrt{n}.$$

Así, el coste en hojas es

$$\text{coste en hojas} = d \cdot 2^h = d\sqrt{n}.$$

Sumando todo:

$$\begin{aligned} T(n) &= \underbrace{\sqrt{n}\,\log_4 n}_{\text{niveles internos}} + \underbrace{d\sqrt{n}}_{\text{hojas}} \\ &= \sqrt{n}\,\big(\log_4 n + d\big) \\ &= \Theta\big(\sqrt{n}\,\log n\big). \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\boxed{T(n) = \Theta\big(n^{\log_b a}\log n\big)} \quad \text{con } a = 2,\ b = 4.$$

3.3. Método de sustitución (inducción)

Proponemos como solución

$$T(n) = \Theta\big(\sqrt{n}\,\log n\big) = \Theta\big(n^{\log_4 2}\,\log n\big).$$

Demostraremos tanto una cota superior como una inferior por inducción (para $n = 4^k$; si n no es potencia de 4, el uso de techos/suelos no altera la clase asintótica).

Cota superior: $T(n) = O\big(\sqrt{n}\,\log n\big)$

Afirmación inductiva: existen constantes $A \geq 1$ y $B \geq d$ tales que, para todo $n \geq 1$ potencia de 4,

$$T(n) \leq A\sqrt{n}\,\log_4 n + B\sqrt{n}.$$

Caso base ($n = 1$): como $\log_4 1 = 0$ y $\sqrt{1} = 1$,

$$T(1) = d \leq B = A \cdot 0 + B \cdot 1,$$

que se satisface eligiendo $B \geq d$.

Paso inductivo: supongamos que para todo $m < n$ (potencias de 4) se cumple $T(m) \le A\sqrt{m}\,\log_4 m + B\sqrt{m}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
T(n) &= 2\,T\Big(\frac{n}{4}\Big) + \sqrt{n} \\
&\le 2\left(A\sqrt{\frac{n}{4}}\,\log_4\Big(\frac{n}{4}\Big) + B\sqrt{\frac{n}{4}}\right) + \sqrt{n} \quad \text{(por hipótesis inductiva)} \\
&= 2\left(\frac{A}{2}\sqrt{n}\,\big(\log_4 n - 1\big) + \frac{B}{2}\sqrt{n}\right) + \sqrt{n} \\
&= A\sqrt{n}\,\big(\log_4 n - 1\big) + B\sqrt{n} + \sqrt{n} \\
&= A\sqrt{n}\,\log_4 n + \big(B + 1 - A\big)\sqrt{n} \\
&\le A\sqrt{n}\,\log_4 n + B\sqrt{n} \qquad \text{si} \quad A \ge 1.
\end{aligned}$$

Hemos usado que $\log_4(n/4) = \log_4 n - 1$. Por tanto, $T(n) = O\big(\sqrt{n}\,\log n\big)$.

Cota inferior: $T(n) = \Omega\big(\sqrt{n}\,\log n\big)$

Afirmación inductiva: existen constantes $a \le 1$ y $b \ge 0$ tales que, para todo $n \ge 1$ potencia de 4,

$$T(n) \ge a\sqrt{n}\,\log_4 n - b\sqrt{n}.$$

Caso base ($n = 1$): como $\log_4 1 = 0$ y $\sqrt{1} = 1$,

$$T(1) = d \ge -b,$$

que se satisface eligiendo cualquier $b \ge 0$ (pues $d > 0$).
Paso inductivo: supongamos que para todo $m < n$ se cumple $T(m) \ge a\sqrt{m}\,\log_4 m - b\sqrt{m}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
T(n) &= 2\,T\Big(\frac{n}{4}\Big) + \sqrt{n} \\
&\ge 2\left(a\sqrt{\frac{n}{4}}\,\log_4\Big(\frac{n}{4}\Big) - b\sqrt{\frac{n}{4}}\right) + \sqrt{n} \quad \text{(por hipótesis inductiva)} \\
&= 2\left(\frac{a}{2}\sqrt{n}\,\big(\log_4 n - 1\big) - \frac{b}{2}\sqrt{n}\right) + \sqrt{n} \\
&= a\sqrt{n}\,\big(\log_4 n - 1\big) - b\sqrt{n} + \sqrt{n} \\
&= a\sqrt{n}\,\log_4 n + \big(1 - a - b\big)\sqrt{n} \\
&\ge a\sqrt{n}\,\log_4 n - b\sqrt{n} \qquad \text{si} \quad a \le 1.
\end{aligned}$$

De este modo, $T(n) = \Omega\big(\sqrt{n}\,\log n\big)$.

Conclusión de la sustitución

Como

$$T(n) = O\big(\sqrt{n}\,\log n\big) \quad \text{y} \quad T(n) = \Omega\big(\sqrt{n}\,\log n\big),$$

entonces

$$T(n) = \Theta\big(\sqrt{n}\,\log n\big) = \Theta\big(n^{\log_4 2}\,\log n\big) = \Theta\big(n^{\log_b a}\log n\big),$$

con $a = 2$ y $b = 4$.

Resumen final

En los tres métodos (Maestro, Árbol de recurrencia y Sustitución) hemos obtenido

$$\boxed{T(n) = \Theta\big(n^{\log_b a} \log n\big) = \Theta\big(n^{\log_4 2} \log n\big) = \Theta\big(\sqrt{n}\, \log n\big)}.$$

4. Ejercicio: $T(n) = 2T(n/4) + n$

4.1. Método Maestro

Identificamos los parámetros de la forma estándar $T(n) = a\,T(n/b) + f(n)$:

$$a = 2, \qquad b = 4, \qquad f(n) = n.$$

Calculamos el exponente crítico:

$$\log_b a = \log_4 2.$$

Mostramos que

$$\log_4 2 = \frac{1}{2} \quad \text{porque} \quad 4^{1/2} = 2.$$

Entonces

$$n^{\log_b a} = n^{\log_4 2} = n^{1/2} = \sqrt{n}.$$

Comparamos $f(n)$ con $n^{\log_b a}$ paso a paso, para identificar el caso del Método Maestro.

Primero, observamos que para todo $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} 1 &\leq n^{\log_b a} \\ 1 &\leq n^{\log_4 2} \\ 1 &\leq n^{1/2} \\ 1 &\leq \sqrt{n}. \end{aligned}$$

Ahora verificamos que $f(n)$ es *polinomialmente mayor* que $n^{\log_b a}$, esto es, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(n) = \Omega\big(n^{\log_b a + \varepsilon}\big).$$

Tomamos $\varepsilon = \frac{1}{2}$ y comprobamos detalladamente:

$$\begin{aligned} n^{\log_b a + \varepsilon} &= n^{\log_4 2 + \frac{1}{2}} \\ &= n^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \\ &= n^1 \\ &= n = f(n). \end{aligned}$$

Por lo tanto, con $c = 1$ y $n_0 = 1$,

$$f(n) \geq c\, n^{\log_b a + \varepsilon} \quad \text{para todo } n \geq n_0.$$

Verificamos la condición de regularidad (o suavidad):

$$a\, f\Big(\frac{n}{b}\Big) = 2 \cdot \frac{n}{4} = \frac{n}{2} \leq c_0\, n = c_0\, f(n) \quad \text{con} \quad c_0 = \frac{1}{2} < 1.$$

Se satisfacen, pues, las hipótesis del **Caso 3** del Método Maestro, y concluimos

$$T(n) = \Theta\big(f(n)\big) = \Theta(n).$$

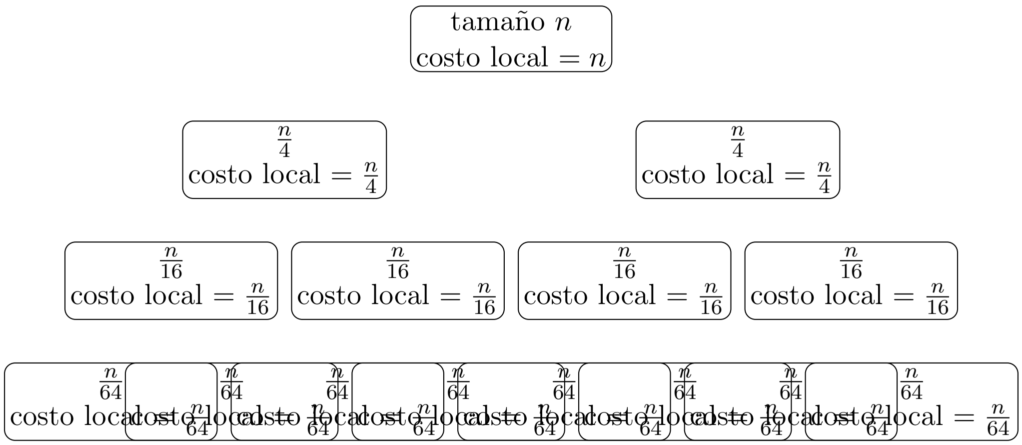
En particular, con $a = 2$ y $b = 4$:

$$\boxed{T(n) = \Theta(n)}.$$

4.2. Método del árbol de recurrencia

Cada nodo de tamaño m realiza un coste local $f(m) = m$ y genera $a = 2$ subproblemas de tamaño $m/b = m/4$.

Esquema del árbol (niveles iniciales)



$$\vdots$$

Altura del árbol

En el nivel i:

$$\text{tamaño de cada subproblema} = \frac{n}{4^i}, \qquad \text{número de nodos} = 2^i.$$

La expansión se detiene cuando el tamaño es 1:

$$\frac{n}{4^h} = 1 \iff 4^h = n \iff h = \log_4 n.$$

Coste por nivel y coste total

El coste por nodo en el nivel i es

$$\frac{n}{4^i}.$$

Entonces, el coste del nivel i es

$$\text{coste en el nivel } i = 2^i \cdot \frac{n}{4^i} = n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i.$$

La suma de los niveles internos (desde $i = 0$ hasta $i = h - 1$) es una serie geométrica:

$$\sum_{i=0}^{h-1} n \left(\frac{1}{2}\right)^i = n \sum_{i=0}^{h-1} \left(\frac{1}{2}\right)^i = n \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^h}{1 - \frac{1}{2}} = 2n \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^h\right).$$

Reescribimos $\left(\frac{1}{2}\right)^h$ en función de n paso a paso:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^h = \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_4 n} = 2^{-\log_4 n} = e^{-\ln 2 \cdot \frac{\ln n}{\ln 4}} = e^{-\ln n \cdot \frac{\ln 2}{\ln 4}} = n^{-\frac{\ln 2}{\ln 4}} = n^{-\log_4 2} = n^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Por tanto,

$$\sum_{i=0}^{h-1} n \left(\frac{1}{2}\right)^i = 2n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 2n - 2\sqrt{n} = \Theta(n).$$

Contamos el coste de las hojas. En el nivel h hay

$$2^h = 2^{\log_4 n}$$

hojas. Reescribimos 2^h paso a paso:

$$2^h = 2^{\log_4 n} = 2^{\frac{\ln n}{\ln 4}} = e^{\ln 2 \cdot \frac{\ln n}{\ln 4}} = e^{\ln n \cdot \frac{\ln 2}{\ln 4}} = n^{\frac{\ln 2}{\ln 4}} = n^{\log_4 2} = \sqrt{n}.$$

Cada hoja tiene coste $T(1) = d$, así que el coste en hojas es

$$\text{coste en hojas} = d \cdot 2^h = d\sqrt{n} = \Theta(\sqrt{n}).$$

Sumando todo:

$$\begin{aligned} T(n) &= \underbrace{\Theta(n)}_{\text{niveles internos}} + \underbrace{\Theta(\sqrt{n})}_{\text{hojas}} \\ &= \Theta(n). \end{aligned}$$

Concluimos nuevamente:

$$\boxed{T(n) = \Theta(n)}.$$

4.3. Método de sustitución (inducción)

Proponemos como solución

$$T(n) = \Theta(n).$$

Demostraremos tanto una cota superior como una inferior por inducción (para $n = 4^k$; si n no es potencia de 4, el uso de techos/suelos no altera la clase asintótica).

Cota superior: $T(n) = O(n)$

Afirmación inductiva: existe una constante $C \geq \text{máx}\{2, d\}$ tal que, para todo $n \geq 1$ potencia de 4,

$$T(n) \leq C\, n.$$

Caso base ($n = 1$): se cumple ya que $T(1) = d \leq C$ por elección de C.
Paso inductivo: supongamos que para todo $m < n$ (potencias de 4) se cumple $T(m) \leq C\, m$. Entonces,

$$\begin{aligned} T(n) &= 2\, T\left(\frac{n}{4}\right) + n \\ &\leq 2\left(C\, \frac{n}{4}\right) + n \qquad \text{(por hipótesis inductiva)} \\ &= \frac{C}{2}\, n + n \\ &\leq C\, n \qquad \text{si} \quad C \geq 2. \end{aligned}$$

Así queda probada la cota superior $T(n) = O(n)$.

Cota inferior: $T(n) = \Omega(n)$

Afirmación inductiva: existe una constante $c > 0$ (por ejemplo, $c = \text{mín}\{1, d\}$) tal que, para todo $n \geq 1$ potencia de 4,

$$T(n) \geq c\, n.$$

Caso base ($n = 1$): como $T(1) = d \geq c$, se cumple $T(1) \geq c \cdot 1$.
Paso inductivo: supongamos que para todo $m < n$ se cumple $T(m) \geq c\, m$. Entonces,

$$\begin{aligned} T(n) &= 2\, T\left(\frac{n}{4}\right) + n \\ &\geq 2\left(c\, \frac{n}{4}\right) + n \qquad \text{(por hipótesis inductiva)} \\ &= \frac{c}{2}\, n + n \\ &\geq c\, n \qquad \text{si} \quad c \leq 2. \end{aligned}$$

Eligiendo $c \leq 1$ (en particular $c = \text{mín}\{1, d\}$), la condición $c \leq 2$ queda satisfecha y obtenemos la cota inferior deseada.

Conclusión de la sustitución

Como

$$T(n) = O(n) \quad \text{y} \quad T(n) = \Omega(n),$$

entonces

$$T(n) = \Theta(n).$$

Resumen final

En los tres métodos (Maestro, Árbol de recurrencia y Sustitución) hemos obtenido

$$\boxed{T(n) = \Theta(n)}.$$

5. Ejercicio: $T(n) = 2T(n/4) + n^2$

5.1. Método Maestro

Escribimos la recurrencia en la forma estándar $T(n) = a\,T(n/b) + f(n)$:

$$a = 2, \qquad b = 4, \qquad f(n) = n^2.$$

Calculamos el exponente crítico:

$$\log_b a = \log_4 2.$$

Mostramos paso a paso que

$$\log_4 2 = \frac{1}{2} \quad \text{porque} \quad 4^{1/2} = 2.$$

Entonces

$$n^{\log_b a} = n^{\log_4 2} = n^{1/2}.$$

Comparamos $f(n)$ con $n^{\log_b a}$ para determinar el caso aplicable. Para $n \geq 1$:

$$n^{\log_b a} = n^{\log_4 2} = n^{1/2} = \sqrt{n},$$
$$f(n) = n^2.$$

Verificamos que $f(n)$ domina *polinomialmente* a $n^{\log_b a}$, esto es, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(n) = \Omega\big(n^{\log_b a+\varepsilon}\big).$$

Tomando, por ejemplo, $\varepsilon = \frac{3}{2}$:

$$\begin{aligned} n^{\log_b a+\varepsilon} &= n^{\log_4 2+\frac{3}{2}} \\ &= n^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} \\ &= n^2 \\ &= f(n). \end{aligned}$$

Además, comprobamos la condición de regularidad:

$$a\,f\Big(\frac{n}{b}\Big) = 2\left(\frac{n}{4}\right)^2 = 2 \cdot \frac{n^2}{16} = \frac{n^2}{8} \leq c_0\,n^2 = c_0\,f(n) \quad \text{con} \quad c_0 = \frac{1}{8} < 1.$$

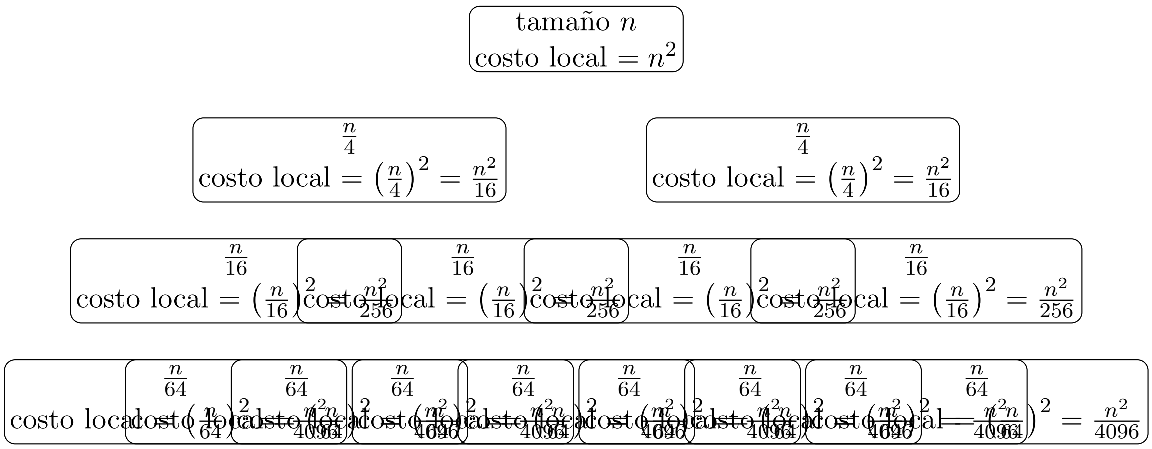
Por consiguiente, aplica el **Caso 3** del Método Maestro y concluimos

$$T(n) = \Theta\big(f(n)\big) = \Theta\big(n^2\big).$$

5.2. Método del árbol de recurrencia

Cada nodo de tamaño m realiza un coste local $f(m) = m^2$ y genera $a = 2$ subproblemas de tamaño $m/b = m/4$.

Árbol (niveles iniciales)



$$\vdots$$

Altura del árbol

En el nivel i:

$$\text{tamaño de cada subproblema} = \frac{n}{4^i}, \qquad \text{número de nodos} = 2^i.$$

La expansión se detiene cuando el tamaño es 1:

$$\frac{n}{4^h} = 1 \iff 4^h = n \iff h = \log_4 n.$$

Coste por nivel y coste total

El coste por nodo en el nivel i es

$$\left(\frac{n}{4^i}\right)^2 = \frac{n^2}{16^i}.$$

Entonces, el coste del nivel i es

$$\text{coste en el nivel } i = 2^i \cdot \frac{n^2}{16^i} = n^2 \cdot \left(\frac{2}{16}\right)^i = n^2 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^i.$$

La suma de los niveles internos (desde $i = 0$ hasta $i = h - 1$) es una progresión geométrica:

$$\sum_{i=0}^{h-1} n^2 \left(\frac{1}{8}\right)^i = n^2 \sum_{i=0}^{h-1} \left(\frac{1}{8}\right)^i = n^2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^h}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{8}{7} n^2 \left(1 - \left(\frac{1}{8}\right)^h\right).$$

Reescribimos $\left(\frac{1}{8}\right)^h$ en función de n paso a paso:

$$\left(\frac{1}{8}\right)^h = \left(\frac{1}{8}\right)^{\log_4 n} = 8^{-\log_4 n} = e^{-\ln 8 \cdot \frac{\ln n}{\ln 4}} = e^{-\ln n \cdot \frac{\ln 8}{\ln 4}} = n^{-\frac{\ln 8}{\ln 4}} = n^{-\log_4 8}.$$

Como

$$\log_4 8 = \frac{\ln 8}{\ln 4} = \frac{3 \ln 2}{2 \ln 2} = \frac{3}{2},$$

tenemos

$$\left(\frac{1}{8}\right)^h = n^{-3/2}.$$

Por tanto,

$$\sum_{i=0}^{h-1} n^2 \left(\frac{1}{8}\right)^i = \frac{8}{7} n^2 \left(1 - n^{-3/2}\right) = \frac{8}{7} n^2 - \frac{8}{7} n^{1/2} = \Theta(n^2).$$

Ahora contamos las hojas. En el nivel h hay

$$2^h = 2^{\log_4 n}.$$

Reescribimos 2^h en función de n paso a paso:

$$2^h = 2^{\log_4 n} = 2^{\frac{\ln n}{\ln 4}} = e^{\ln 2 \cdot \frac{\ln n}{\ln 4}} = e^{\ln n \cdot \frac{\ln 2}{\ln 4}} = n^{\frac{\ln 2}{\ln 4}} = n^{\log_4 2} = n^{1/2} = \sqrt{n}.$$

Cada hoja aporta coste $T(1) = d$, así que el coste total en hojas es

$$\text{coste en hojas} = d \cdot 2^h = d\sqrt{n} = \Theta\big(n^{1/2}\big).$$

Sumando:

$$\begin{aligned} T(n) &= \underbrace{\Theta(n^2)}_{\text{niveles internos}} + \underbrace{\Theta\big(n^{1/2}\big)}_{\text{hojas}} \\ &= \Theta(n^2). \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\boxed{T(n) = \Theta(n^2)}.$$

5.3. Método de sustitución (inducción)

Proponemos como solución

$$T(n) = \Theta(n^2).$$

Demostraremos una cota superior y una inferior por inducción (para $n = 4^k$; si n no es potencia de 4, el uso de techos/suelos no altera la clase asintótica).

Cota superior: $T(n) = O(n^2)$

Afirmación inductiva: existe una constante $C \geq \max\{d, \frac{8}{7}\}$ tal que, para todo $n \geq 1$ potencia de 4,

$$T(n) \leq C\, n^2.$$

Caso base ($n = 1$): se cumple ya que $T(1) = d \leq C$ por elección de C.
Paso inductivo: supongamos que para todo $m < n$ (potencias de 4) se cumple $T(m) \leq C\, m^2$. Entonces,

$$\begin{aligned}
T(n) &= 2\, T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2 \\
&\leq 2\left(C\, \frac{n^2}{16}\right) + n^2 \qquad \text{(por hipótesis inductiva)} \\
&= \frac{C}{8}\, n^2 + n^2 \\
&\leq C\, n^2 \qquad \text{si} \quad C \geq \frac{8}{7}.
\end{aligned}$$

Con esto queda demostrada la cota superior $T(n) = O(n^2)$.

Cota inferior: $T(n) = \Omega(n^2)$

Afirmación inductiva: existe una constante $c > 0$ (por ejemplo, $c = \min\{1, d\}$) tal que, para todo $n \geq 1$ potencia de 4,

$$T(n) \geq c\, n^2.$$

Caso base ($n = 1$): $T(1) = d \geq c \cdot 1^2$ por la elección de $c \leq d$.
Paso inductivo: supongamos que para todo $m < n$ se cumple $T(m) \geq c\, m^2$. Entonces,

$$\begin{aligned}
T(n) &= 2\, T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2 \\
&\geq 2\left(c\, \frac{n^2}{16}\right) + n^2 \qquad \text{(por hipótesis inductiva)} \\
&= \frac{c}{8}\, n^2 + n^2 \\
&= \left(1 + \frac{c}{8}\right) n^2 \\
&\geq c\, n^2 \qquad \text{si} \quad c \leq \frac{8}{7}.
\end{aligned}$$

Eligiendo $c \leq 1$ (en particular $c = \min\{1, d\}$), se satisface $c \leq \frac{8}{7}$ y por tanto la cota inferior.

Conclusión de la sustitución

Como

$$T(n) = O(n^2) \quad \text{y} \quad T(n) = \Omega(n^2),$$

entonces

$$T(n) = \Theta(n^2).$$

Resumen final

En los tres métodos (Maestro, Árbol de recurrencia y Sustitución) hemos obtenido

$$\boxed{T(n) = \Theta(n^2)}.$$

5.4. Ejercicio 2

Use el método maestro para mostrar que la solución a la recurrencia para la búsqueda binaria:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(1)$$

es:

$$T(n) = \Theta(\log n)$$

1) Poner en forma estándar La forma estándar es $T(n) = aT(n/b) + f(n)$. Aquí: $a = 1$, $b = 2$, $f(n) = \Theta(1)$.

2) Exponente crítico Calculamos:

$$\log_b a = \log_2 1 = \frac{\ln 1}{\ln 2} = \frac{0}{\ln 2} = 0,$$

y por tanto

$$n^{\log_b a} = n^0 = 1.$$

3) Comparación de $f(n)$ con $n^{\log_b a}$ Queremos expresar $f(n)$ en la forma del Caso 2: $f(n) = \Theta\big(n^{\log_b a} \log^k n\big)$ para algún $k \geq 0$. Observamos que

$$f(n) = \Theta(1) = \Theta\big(n^0\big) = \Theta\big(n^{\log_2 1}\big).$$

Esto corresponde exactamente a $k = 0$, pues

$$\Theta(1) = \Theta\big(n^{\log_2 1} \log^0 n\big).$$

De manera explícita, existen constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que para todo $n \geq 1$:

$$c_1\, n^{\log_2 1} \leq f(n) \leq c_2\, n^{\log_2 1},$$

porque

$$n^{\log_2 1} = n^0 = 1.$$

4) Identificación del caso del Método Maestro y conclusión Al cumplirse $f(n) = \Theta\big(n^{\log_b a} \log^k n\big)$ con $k = 0$, aplica el Caso 2 del Método Maestro:

$$T(n) = \Theta\big(n^{\log_b a} \log^{k+1} n\big) = \Theta\big(n^0 \log n\big) = \Theta(\log n).$$

Si escribimos el logaritmo en base 2 (lg), esto es $T(n) = \Theta(\lg n)$.

Resultado en la notación del Método Maestro:

$$T(n) = \Theta\big(n^{\log_b a} \log n\big) \quad \text{con } a = 1,\ b = 2,$$

y en particular:

$$T(n) = \Theta(\lg n).$$